Logarithmes

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur R^{+*}

Définition :

ln : $R^{+*} \to R$

$x \to \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

ln 1 = 0	
$D_{ln} = R^{+*}$	la fonction ln est définie sur R^{+*}
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

Tout d'abord, **la fonction ln est strictement croissante sur R^{+*}**

$0 < a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$

Nous pouvons établir le signe de ln (x) sur son domaine de définition :

x	0	1	$+\infty$
ln x	-	0	+

Propriete :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Propriétés fondamentales de ln :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$$

- Pour tout $a \in R^{+*}$:

$$\ln \frac{1}{a} = - \ln a$$

- Pour tout $a \in R^{+*}$ et $b \in R^{+*}$: $\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln \left(a * \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b}$

$$\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

- Pour tout $a \in R^{+*}$ et pour tout $n \in N^{+}$:

  $\ln (a^n) = \ln (a * a * a * .... * a) = \ln a + \ln a + ... + \ln a = n * \ln a$

$$\ln (a^n) = n \ln a$$

- $\ln a = \ln (\sqrt{a} * \sqrt{a}) = 2 \ln \sqrt{a}$

$$\ln (\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln (e^n) = n$$

1.3.2. Limites en $+ \infty$ et en 0

$$\lim_{x \to + \infty} \ln x = + \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \ln x = - \infty$$

1.3.3. Tableau de variation

Avec tout ce que l'on vient de voir sur la fonction logarithme, nous pouvons établir son tableau de variation :

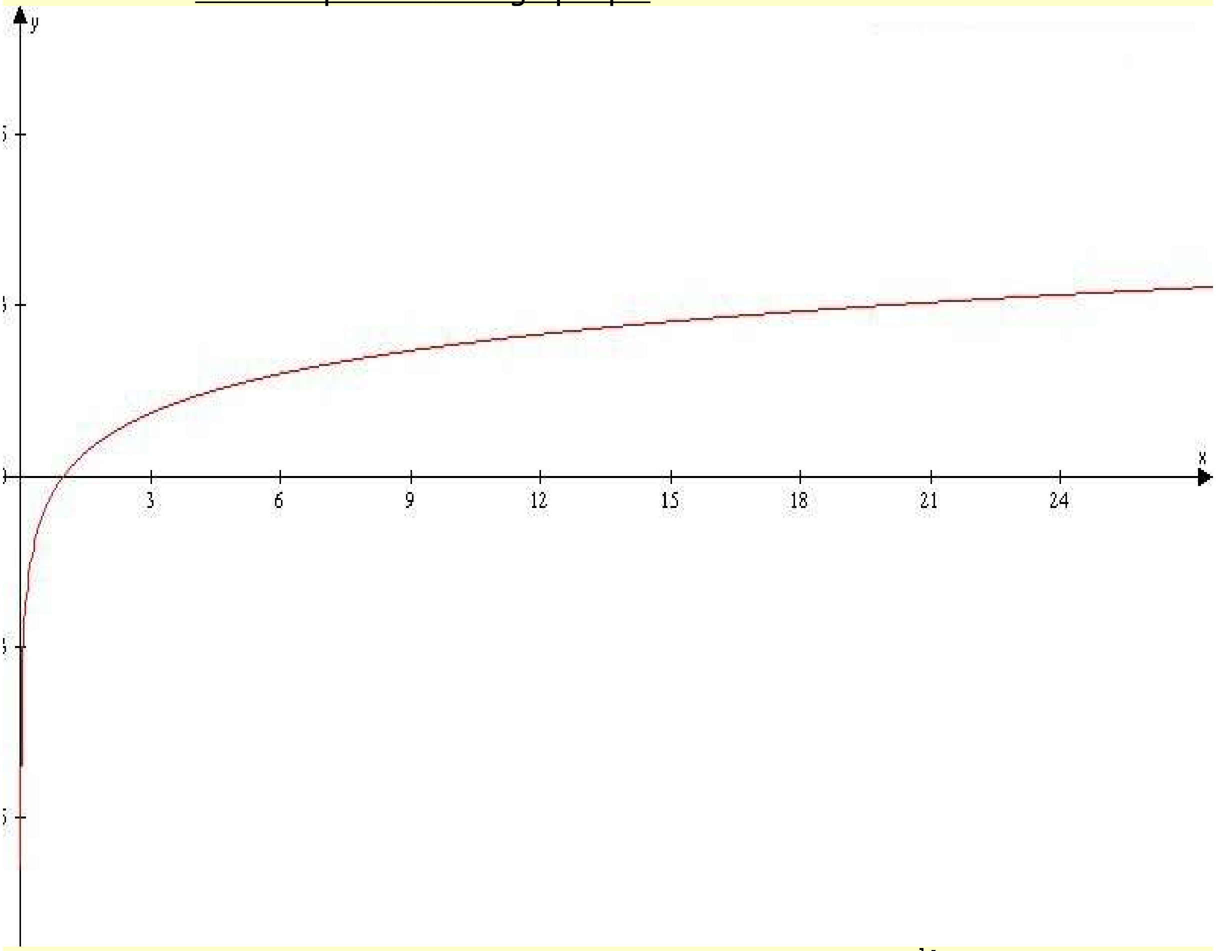
x	0	1	$+\infty$
ln x	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

La fonction logarithme sur] 0 ; + ∞[est continue et strictement croissante donc elle réalise

une bijection de] 0 ; + ∞[sur un intervalle J =] $\lim_{x \to 0}$ ln x ; $\lim_{x \to +\infty}$ ln x [

=] - ∞; + ∞[, c'est-à-dire une bijection de R^{+*} sur R.

1.3.4. Représentation graphique



1) Asymptote : **l'axe des ordonnées est asymptote** car $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$.
2)

2) Tangentes particulières : il en existe deux :

1. Tangente au point A (1 ; 0) de coefficient directeur 1. L'équation de cette tangente est : **y = x - 1**

2. Tangente au point B (e ; 1) de coefficient directeur $\frac{1}{e}$. L'équation de cette tangente est : **y** = $\frac{1}{e}$**x**. Elle passe par l'origine du repère.

1.3.5. Autres limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \mathbf{1}$$

Dérivées avec ln

- pour ln u

Théorème : Soit I un intervalle de R. Si **u est dérivable** sur I et **u(x) > 0** alors **ln u est dérivable** sur I et :

$$\textbf{(ln u)' =} \frac{u'}{u}$$

- pour ln $|u|$

Théorème : Soit I un intervalle de R. Si **u est dérivable** sur I et **u(x)** $\neq$**0** sur I alors **ln** $|u|$**est dérivable** sur I et :

$$\textbf{(ln } |u|\textbf{)' =} \frac{u'}{u}$$

Logarithmes décimaux

Définition : log est définie sur R^{+*} par **log x =** $\frac{ln x}{10}$

Exemples :

- log 1 = 0
- log 10 = 1

2) Etude des variations :

a) Limites : D_{log} =] 0 ; + ∞[

$\lim_{x \to 0}$ ln x = - ∞, $\lim_{x \to +\infty}$ ln x = + ∞, ln 10 > 0

$$\lim_{x \to 0} \textbf{log (x) = -} \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \textbf{log (x) = +} \infty$$